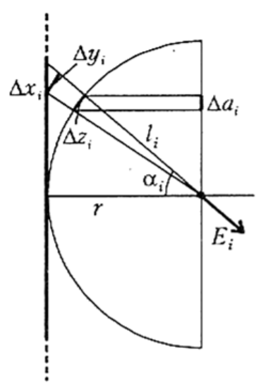
Урок №3 (20.09.2018)
Электрическое поле заряженной нити и плоскости

1. Принцип суперпозиции.

Принцип суперпозиции утверждает, что поле, создаваемое несколькими зарядами, есть векторная сумма полей, создаваемых каждым зарядом по отдельности. Аналогичный принцип действует и для потенциалов, но там сумма – скалярная.

Поле бесконечной заряженной нити.

Посчитаем поле, создаваемое бесконечной заряженной прямой нитью с плотностью заряда λ на расстоянии r от нити[1].



Разобьём нить на маленькие кусочки и запишем принцип суперпозиции:

$$\vec{E} = \sum \vec{E}_i ,$$

где

$$E_i = \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 l_i^2} ,\ q_i = \lambda \Delta x_i ,\ l_i^2 = r^2 + x_i^2 .$$

Параллельные составляющие, очевидно, сокращаются, поэтому для модуля результирующего поля получим:

$$E = \sum E_{i\perp} = \sum \frac{\lambda \Delta x_i}{4\pi\varepsilon_0 l_i^2} \cos\alpha_i .$$

Эту ужасную сумму можно посчитать, воспользовавшись геометрической интерпретацией. Для этого проведём касающуюся нити окружность с центром в точке наблюдения. Тогда $\Delta y_i = \Delta x_i \cos\alpha_i$, $\dfrac{\Delta z_i}{\Delta y_i} = \dfrac{r}{l_i} = \cos\alpha_i$. Подставляя это в нашу сумму и вынося константы, получаем:

$$E = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \sum \frac{r\Delta y_i}{l_i}\frac{r}{l_i} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \sum \Delta z_i \cos\alpha_i =$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \sum \Delta a_i = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r^2} 2r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} .$$

Итак, бесконечная прямая нить с плотностью заряда λ создаёт вокруг себя поле

$$\boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2\lambda}{r}}$$

■

Поле заряженной плоскости.

Посчитаем теперь поле равномерно заряженной плоскости. Пусть поверхностная плотность заряда равна σ. Разрежем плоскость на тонкие полоски, шири-

[1] По статье Д.Александрова «Принцип суперпозиции и напряжённость электрического поля», см. «Приложение к журналу Квант», №3/2001

ной Δx. Заряд единицы длины такой полоски равен $\lambda = \sigma\,\Delta x$, а поле, создаваемое *i*-той полоской равно

$$E_i = \frac{\sigma \Delta x_i}{2\pi\varepsilon_0 l_i}.$$

Согласно принципу суперпозиции

$$E = \sum E_i \cos\alpha_i = \sum \frac{\sigma \Delta x_i \cos\alpha_i}{2\pi\varepsilon_0 l_i}.$$

Подставляя аналогично предыдущей задаче, получаем:

$$E = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\sum \frac{\Delta x_i \cos\alpha_i}{l_i} = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\sum\frac{\Delta y_i}{l_i} = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0 r}\sum\frac{\Delta y_i r}{l_i} =$$

$$= \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0 r}\sum \Delta z_i = \frac{\sigma\pi r}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Итак, бесконечная плоскость с поверхностной плотностью заряда σ создаёт «перед собой» электрическое поле

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$ ■

Мы получили удивительный факт: поле заряженной плоскости *не зависит от расстояния до плоскости*! Такое поле называется *однородным*.

2. Задачи

1. Тонкому проволочному кольцу радиусом R сообщён заряд q. В центре кольца расположен точечный заряд Q того же знака, причём $Q >> q$. Определить силу упругости, возникающую в кольце. $T = \frac{1}{8\pi^2\varepsilon_0}\frac{Q\cdot q}{R^2}$
2. Три одинаковых маленьких шарика, массой m каждый, подвешены в одной точке на одинаковых нитях длиной l. Какие заряды нужно сообщить шарикам, чтобы каждая нить составила с вертикалью угол $\alpha = 30^\circ$? $q = l\sqrt{\pi\varepsilon_0 mg}$
3. Заряд $q = 50\ мкКл$ находится на плоскости XOY в точке с радиус-вектором $\vec{r}_0 = 2\vec{i} + 3\vec{j}$. Найти вектор напряжённости электрического поля и его модуль в точке с радиус-вектором $\vec{r} = 8\vec{i} - 5\vec{j}$.